1.9.5 Zjednodušování lomených výrazů I

Předpoklady: 010904

Zápis $\dfrac{\dfrac{4}{3+\sqrt{2}}}{\dfrac{2}{7}}$ už známe, jde o složený zlomek. Platí: $\dfrac{\dfrac{4}{3+\sqrt{2}}}{\dfrac{2}{7}}=\dfrac{4\cdot 7}{2\left(3+\sqrt{2}\right)}$.

Podobně $\dfrac{\dfrac{V_1}{V_2}}{\dfrac{V_3}{V_4}}$ je složený lomený výraz $\Rightarrow$ jak ho odstranit a převést na normální lomený výraz?

Zlomková čára znamená dělení $\Rightarrow$ $\dfrac{\dfrac{V_1}{V_2}}{\dfrac{V_3}{V_4}}=\dfrac{V_1}{V_2}:\dfrac{V_3}{V_4}$ a dál už víme, co s tím.

Př. 1: Doplň větu: „Pro libovolné výrazy $V_1;V_2;V_3;V_4$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2\neq 0;V_3\neq 0;V_4\neq 0$ platí: $\dfrac{\dfrac{V_1}{V_2}}{\dfrac{V_3}{V_4}}=\ \dots$“.

Pro libovolné výrazy $V_1;V_2;V_3;V_4$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2\neq 0;V_3\neq 0;V_4\neq 0$, platí: $\dfrac{\dfrac{V_1}{V_2}}{\dfrac{V_3}{V_4}}=\dfrac{V_1}{V_2}:\dfrac{V_3}{V_4}=\dfrac{V_1}{V_2}\cdot\dfrac{V_4}{V_3}=\dfrac{V_1\cdot V_4}{V_2\cdot V_3}$**.**

Postupujeme stejně jako u zlomků.

Poznámka: Způsob, jakým převedeme složený zlomek na normální, můžeme zdůvodnit velice rychle i jinak. Složený lomený výraz $\dfrac{\dfrac{V_1}{V_2}}{\dfrac{V_3}{V_4}}$ znázorňuje dělení dvou čísel (modrého červeným). Napíšeme si výsledný jednoduchý zlomek, do jeho čitatele umisťujeme výrazy, které zvětšují výsledek, a do jmenovatele výrazy, které výsledek zmenšují.
V_1 - je čitatelem děleného čísla $\Rightarrow$ zvětšuje výsledek (patří nahoru).
V_2 - je jmenovatelem děleného čísla $\Rightarrow$ zmenšuje výsledek (patří dolů).
V_3 - je čitatelem čísla, které dělí $\Rightarrow$ zmenšuje výsledek (patří dolů).

V_4 - je jmenovatelem čísla, které dělí $\Rightarrow$ zvětšuje výsledek (patří nahoru).

$\Rightarrow$ Platí: $\dfrac{\dfrac{V_1}{V_2}}{\dfrac{V_3}{V_4}} = \dfrac{V_1 \cdot V_4}{V_2 \cdot V_3}$.

Př. 2: Zjednoduš výrazy.

a) $\dfrac{\dfrac{4x^2y}{6a^2b^3}}{\dfrac{8xy^2}{12a^2b^4}}$ b) $\dfrac{\dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}}$ c) $\dfrac{\dfrac{x^2-9}{x^2+4x+3}}{\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}}$ d) $\dfrac{4-x^2}{\dfrac{x^2-x-2}{x^2+3x+2}}$

a) Podmínky: $x \neq 0$; $y \neq 0$; $a \neq 0$; $b \neq 0$.

$$\frac{\frac{4x^2y}{6a^2b^3}}{\frac{8xy^2}{12a^2b^4}} = \frac{4x^2y}{6a^2b^3} \cdot \frac{12a^2b^4}{8xy^2} = \frac{xb}{y}$$

b) Podmínky: $a \neq b$; $a \neq -b$.

$$\frac{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}}{\frac{a+b}{a-b}} = \frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{a-b}{a+b} = 1$$

c)

$$\frac{\frac{x^2-9}{x^2+4x+3}}{\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}} = \frac{\frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+1)}}{\frac{(x-3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}} = \frac{(x-3)(x+3)(x+1)(x-1)}{(x+3)(x+1)(x-3)(x-1)} = 1$$

Podmínky: $x \neq \pm 3$; $x \neq \pm 1$.

d)

$$\frac{4-x^2}{\frac{x^2-x-2}{x^2+3x+2}} = \frac{(2-x)(2+x)}{\frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x+1)}} = \frac{(2-x)(2+x)(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+1)} =$$

$$= \frac{-(x-2)(2+x)(x+2)}{(x-2)} = -(x+2)^2$$

Podmínky: $x \neq \pm 2$; $x \neq -1$.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti převádějí zlomek pomocí dělení a začnou krátit ještě před tím, než druhý zlomek v součinu převrátí a dělení převedou na násobení.

Napíší tedy: $\dfrac{\dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}} = \dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2} : \dfrac{a+b}{a-b}$ a začnou krátit.

Většinou si sice situaci (mají napsaný podíl zlomků a nemohou krátit proti sobě) uvědomují, ale přesto často udělají chybu. Myslím, že je lepší trvat na tom, aby začali krátit až ve chvíli, kdy mají zlomek převedený na součin zlomků.

V bodě d) pak mají někteří studenti samozřejmě problémy s tím, zda výraz $4-x^2$ tvoří čitatel nebo jmenovatel horního zlomku. Radím studentům, že přepsat si zlomek do tvaru: $\dfrac{\dfrac{4-x^2}{x^2-x-2}}{x^2+3x+2} = \dfrac{\dfrac{\frac{4-x^2}{1}}{x^2-x-2}}{x^2+3x+2}$, není žádná ostuda.

Př. 3: Zjednoduš výrazy.

a) $\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x-1}{3}}$ b) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{3x+1}{x-1}}$ c) $\dfrac{x+1}{1-\dfrac{x}{x-1}}$ d) $\dfrac{t-\dfrac{t-1}{t+1}}{1+\dfrac{t(t-1)}{t+1}}$

a) Podmínky: $x \neq 1$, $x \neq 0$.

$$\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x-1}{3}} = \frac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x-1}{3}} = \frac{3(x-1)}{x(x-1)} = \frac{3}{x}$$

b) Podmínky: $x \neq \pm 1$, $x \neq 0$.

$$\frac{x-\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{3x+1}{x-1}} = \frac{\dfrac{x^2-1}{x}}{\dfrac{x^2-x+3x+1}{x-1}} = \frac{\dfrac{x^2-1}{x}}{\dfrac{x^2+2x+1}{x-1}} = \frac{\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}}{\dfrac{(x+1)^2}{x-1}} = \frac{(x-1)(x+1)(x-1)}{(x+1)^2 x} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)}$$

c) Podmínky: $x \neq 1$.

$$\frac{x+1}{1-\dfrac{x}{x-1}} = \frac{x+1}{\dfrac{(x-1)-x}{x-1}} = \frac{x+1}{\dfrac{-1}{x-1}} = \frac{x+1}{1}\cdot\frac{x-1}{-1} = -\left(x^2-1\right) = 1-x^2$$

d) Podmínky: $t \neq -1$.

$$\frac{t-\dfrac{t-1}{t+1}}{1+\dfrac{t(t-1)}{t+1}} = \frac{\dfrac{t(t+1)-(t-1)}{t+1}}{\dfrac{(t+1)+t(t-1)}{t+1}} = \frac{\dfrac{t^2+t-t+1}{t+1}}{\dfrac{t+1+t^2-t}{t+1}} = \frac{\dfrac{t^2+1}{t+1}}{\dfrac{t^2+1}{t+1}} = \frac{t^2+1}{t+1}\cdot\frac{t+1}{t^2+1} = 1$$

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu jde o to, aby se studenti naučili nejdříve upravit složený výraz do tvaru, ve kterém je naprosto jasné, co je čitatelem a jmenovatelem zlomků, které se mají zjednodušovat. Často se například v bodě c) stává, že studenti začnou upravovat složený zlomek ještě před tím, než upraví zlomky. Například takto: $\dfrac{x+1}{1-\dfrac{x}{x-1}}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{1-x}$.

Př. 4: Zjednoduš výrazy.

a) $\dfrac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}}$ b) $\left(\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}+\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\right):\left(\dfrac{x^{-1}}{1+x^{-1}}-\dfrac{1-x^{-1}}{x^{-1}}\right)$

a) Podmínky: $x\neq 0$.

$$\dfrac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}}=\dfrac{\dfrac{(1-x)(1+x+x^2)+(1+x)(1-x+x^2)}{(1-x+x^2)(1+x+x^2)}}{\dfrac{(1+x)(1-x+x^2)-(1-x)(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)(1-x+x^2)}}=$$

$$=\dfrac{1+x+x^2-x-x^2-x^3+1-x+x^2+x-x^2+x^3}{1-x+x^2+x-x^2+x^3-(1+x+x^2-x-x^2-x^3)}=\dfrac{2}{2x^3}=\dfrac{1}{x^3}$$

b)

$$\left(\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}+\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\right):\left(\dfrac{x^{-1}}{1+x^{-1}}-\dfrac{1-x^{-1}}{x^{-1}}\right)=\left(\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x+1}{x}}+\dfrac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\right):\left(\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\right)=$$

$$=\left(\dfrac{1}{x+1}+x-1\right):\left(\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x+1}{x}}-\dfrac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\right)=\left(\dfrac{1+x^2-1}{x+1}\right):\left(\dfrac{1}{x+1}-[x-1]\right)=$$

$$\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right):\left(\dfrac{1-x^2+1}{x+1}\right)=\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)\cdot\left(\dfrac{x+1}{2-x^2}\right)=\dfrac{x^2}{2-x^2}$$

Podmínky: $x\neq 0$, $x\neq -1$, $2-x^2\neq 0$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je víceméně bonbónkem pro šikovnější počtáře.

Př. 5: Sbírka příklad 9.

Shrnutí: I složené lomené výrazy se upravují analogicky jako složené zlomky.